第31講　微分法・積分法(4)

【基礎確認事項】

［1］　不定積分

微分の演算に対して，その逆の演算としての積分について考える．

例　$f(x)=3x^2$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数として

x^3，x^3+1，x^3-2

などがある．

□微分して $3x^2$ になる関数は，x^3+C （C は定数） の形で表される．定数 C は微分すると 0 になるため，C は任意の定数である．

□一般に，関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数を，$f(x)$ の**不定積分**または**原始関数**といい，$\boldsymbol{\int f(x)dx}$ で表す．上の例では，$\int 3x^2dx=x^3+C$ である．C は任意の定数であるため，$f(x)$ の原始関数が存在するならば，それは無数にある．

□関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を**積分する**という．また，$\int f(x)dx$ において，$f(x)$ を**被積分関数**，x を**積分変数**という．

□$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分の1つとすると，任意の不定積分は $\int f(x)dx=F(x)+C$ の形で表される．この定数 C を**積分定数**という．

$$F'(x)=f(x) \iff \int f(x)dx=F(x)+C \quad (C：積分定数) \quad \cdots\cdots①$$

□ n が 0 または正の整数のとき $\left(\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$ であることから，次のことが成り立つ．

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

とくに $n=0$ のとき $\int 1\,dx=\int dx=x+C$

（C：積分定数）

微分法の公式を用いて，関数の定数倍や和の不定積分を求める公式を作ることができる．

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \qquad \int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

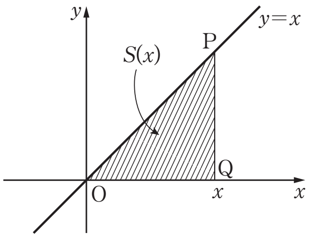
⇒ C&U 1

［2］ 定積分

□直線 $y=x$ と x 軸の間で右の図の斜線部分の面積 $S(x)$ は

$$S(x)=\triangle \mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}x^2$$

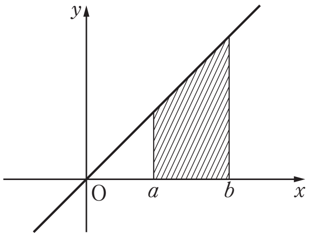
であって，これは関数 $f(x)=x$ の不定積分 $\int x dx$ である．



さらに，$0<a<b$ として，右の図のように直線 $y=x$，x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ の囲む面積は

$$S(b)-S(a)$$

に等しい．



この例でみたように，関数 $f(x)$ に対して，その不定積分を $F(x)$ とするとき，

$$F(b)-F(a) \quad \cdots\cdots ①$$

の値を考えることは，$y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積に関連して重要である（後述）．

□$f(x)$ の不定積分は無数にあるが，そのどれをとってもこの①の値は変わらない．例えば，$f(x)$ の 2 つの不定積分 $F(x)$，$G(x)$ の間には，$G(x)=F(x)+C$ （C：定数）という関係があり，

$$G(b)-G(a)=\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\}=F(b)-F(a)$$

であるから，$G(b)-G(a)$ の値は①と一致する．

この①の値を，関数 $f(x)$ の $x=a$ から $x=b$ までの**定積分**といい，$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$ と表す．この定積分において，a を下端，b を上端という．また，この定積分の値を求めることを $f(x)$ を a から b まで**積分する**という． また，①は簡単に $[F(x)]_a^b$ と書ける．

定積分

$f(x)$ の不定積分の1つを $F(x)$ とするとき　$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

この定積分の定義により，a，b，c の大小に関わらず次の性質が成り立つ．

定積分の性質

$\int_a^a f(x)dx=0$　　$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$　　$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　　$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

⇒　C&U ②

［３］　定積分で定義された関数

□定積分 $\int_a^x f(t)dt$ は，x の値を定めるとその値が定まる．よって $\int_a^x f(t)dt$ は x の関数である．この関数の導関数を求めよう．

□$f(t)$ の不定積分を $F(t)$ とすると，定積分の定義により

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

この右辺を x で微分すると　$\{F(x)-F(a)\}' = F'(x) - F'(a) = f(x)$　である．よって次のことが成り立つ．

定積分と導関数

x の関数 $\int_a^x f(t)dt$ を x で微分すると，$f(x)$ となる．

つまり　$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$　である

⇒　C&U ３

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　次の不定積分を求めよ．

(1) $\int(3x^2-4x+1)dx$　　(2) $\int t(t+1)dt$

2　次の定積分を計算せよ．

(1) $\int_{-1}^{3}(x^2+2x+4)dx$　　(2) $\int_{1}^{3}(2x^3+3x^2-5x+1)dx$

3　$\int_{a}^{x}f(t)dt=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}$ のとき，$f(x)$ と a の値を求めよ．

< Note >

第 31 講　微分法・積分法(4)

1　次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)dx$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{2}(t+1)(t^2-1)dt+\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt$

＜ Note ＞

2　次の定積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{3} x|x-2|\,dx$

(2)　$\displaystyle\int_{0}^{3} |x^2-3x+2|\,dx$

＜ Note ＞

3 [1]　x の関数　$f(x)=\int_0^x t(t^2-1)dt$　の極値を求めよ.

[2]　等式　$f(x)=\int_0^1 tf(t)dt+\int_0^1 xf(t)dt+1$　を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

< Note >

第 31 講　微分法・積分法(4)

[1]　定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx-\int_{2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx$ の値は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である.

[2]　(1)　等式 $f(x)=3x^2+2-\displaystyle\int_0^2 xf(t)dt$　を満たす関数 $f(x)$ は

$f(x)=\boxed{\text{エ}}x^2-\boxed{\text{オ}}x+\boxed{\text{カ}}$ である.

(2)　等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2+2x-3$ を満たす関数 $f(x)$ は $f(x)=\boxed{\text{キ}}x+\boxed{\text{ク}}$

であり，定数 a の値は $a=-\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ である.

＜ Note ＞

第 31 講　微分法・積分法(4)

【CHECK & UP】

1 以下，C を積分定数とする．

(1) $\int(3x^2-4x+1)dx$

$=3\int x^2dx-4\int xdx+\int 1\,dx$

$=3\cdot\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{1}{2}x^2+1\cdot x+C=\boldsymbol{x^3-2x^2+x+C}$

(2) $\int t(t+1)dt=\int(t^2+t)dt=\int t^2dt+\int tdt$

$=\boldsymbol{\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+C}$

> 不定積分の計算である．積分計算後は積分定数 C がつく．答えを微分すると C が消えるため，C に関わらず積分前の式に戻る．
> 微分と同様，積分についても(1)の2行目のような計算は計算に慣れた時点で不要となる．
> (2)は積分変数が t である．積分変数はいつでも x とは限らない．変数の文字にかかわらず x と同じ感覚でできるようにしておこう．

2 (1) $\int_{-1}^{3}(x^2+2x+4)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{3}=(9+9+12)-\left(-\frac{1}{3}+1-4\right)=\boldsymbol{\frac{100}{3}}$

(2) $\int_{1}^{3}(2x^3+3x^2-5x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^4+x^3-\frac{5}{2}x^2+x\right]_{1}^{3}=\left(\frac{81}{2}+27-\frac{45}{2}+3\right)-\left(\frac{1}{2}+1-\frac{5}{2}+1\right)=\boldsymbol{48}$

> 定積分の計算は，不定積分の計算後に代入作業が入る分，計算間違いのリスクがある．特に－の値を入れる時，そして下端を入れて「引き算」を行う時に注意したい．

3 $\int_{a}^{x}f(t)dt=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}$　……①

①の左辺を x で微分すると　$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(t)dt=f(x)$

よって①の両辺を x で微分することにより　$\boldsymbol{f(x)=3x-2}$

①で $x=a$ のとき　$0=\frac{3}{2}a^2-2a+\frac{2}{3}$　　$9a^2-12a+4=0$　　$\boldsymbol{a=\frac{2}{3}}$

> 定積分と導関数の関係は，「微分をすれば被積分関数が出てくる」という結果だけを暗記すべきではない．【基礎確認事項】を参照し，その原理を理解した上でその知識を利用していくこと．

第 31 講　微分法・積分法(4)

1　次の定積分の値を求めよ．

（1）$\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)dx$

（2）$\displaystyle\int_{1}^{2}(t+1)(t^2-1)dt+\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt$

（1）$\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-3}^{1}=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1\right)-\left(-18+\frac{9}{2}-3\right)=\mathbf{\frac{56}{3}}$

（2）$\displaystyle\int_{1}^{2}(t+1)(t^2-1)dt+\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt$

$\displaystyle=\int_{-2}^{2}(t+1)(t^2-1)dt=\int_{-2}^{2}(t^3+t^2-t-1)dt$

$\displaystyle=2\int_{0}^{2}(t^2-1)dt=2\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_{0}^{2}=2\left(\frac{8}{3}-2\right)=\mathbf{\frac{4}{3}}$

2　次の定積分を求めよ．

（1）$\displaystyle\int_{-1}^{3}x|x-2|dx$

（2）$\displaystyle\int_{0}^{3}|x^2-3x+2|dx$

（1）$\displaystyle\int_{-1}^{3}x|x-2|dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+2x)dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{3}=0+\frac{4}{3}=\mathbf{\frac{4}{3}}$

（2）$\displaystyle\int_{0}^{3}|x^2-3x+2|dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{1}(x^2-3x+2)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+3x-2)dx+\int_{2}^{3}(x^2-3x+2)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{2}^{3}$

$\displaystyle=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\mathbf{\frac{11}{6}}$

3　[1]　x の関数　$\displaystyle f(x)=\int_{0}^{x}t(t^2-1)dt$　の極値を求めよ．

$\displaystyle f(x)=\int_{0}^{x}t(t^2-1)dt=\int_{0}^{x}(t^3-t)dt=\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x}=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$　より

$f'(x)=x^3-x=x(x-1)(x+1)$

よって

極大値は　$\boldsymbol{f(0)=0}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

極小値は　$f(-1)=-\frac{1}{4}$　および　$f(1)=-\frac{1}{4}$

3 ［2］　等式　$f(x)=\int_0^1 tf(t)dt+\int_0^1 xf(t)dt+1$　を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

$f(x)=\int_0^1 tf(t)dt+\int_0^1 xf(t)dt+1=x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 tf(t)dt+1$

$\int_0^1 f(t)dt=a,\ \int_0^1 tf(t)dt=b$　とおくと　$f(x)=ax+b+1$

このとき

$a=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (at+b+1)dt=\left[\frac{a}{2}t^2+(b+1)t\right]_0^1=\frac{a}{2}+b+1$

$b=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 t(at+b+1)dt=\int_0^1 \{at^2+(b+1)t\}dt=\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{b+1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b+1}{2}$

より　$a-2b=2,\ 2a-3b=-3$　　よって　$a=-12,\ b=-7$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=-12x-6}$

第 31 講　微分法・積分法(4)

[1]　定積分　$\displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx-\int_{2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx$ の値は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ である．

[2]　(1)　等式 $f(x)=3x^2+2-\displaystyle\int_0^2 xf(t)dt$　を満たす関数 $f(x)$ は

$f(x)=\boxed{エ}x^2-\boxed{オ}x+\boxed{カ}$ である．

(2)　等式　$\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2+2x-3$ を満たす関数 $f(x)$ は $f(x)=\boxed{キ}x+\boxed{ク}$

であり，定数 a の値は $a=-\boxed{ケ}$，$\boxed{コ}$ である．

[1]　$\displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx-\int_{2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}(x^3+x^2+x+1)dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{2}(x^3+x^2+x+1)dx$

$\displaystyle=2\int_0^2(x^2+1)dx=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^2=2\left(\frac{8}{3}+2\right)=2\cdot\frac{14}{3}=\mathbf{\frac{28}{3}}$

[2]　(1)　$f(x)=3x^2+2-\displaystyle\int_0^2 xf(t)dt=3x^2+2-x\int_0^2 f(t)dt$

$\displaystyle\int_0^2 f(t)dt=a$　とおくと　$f(x)=3x^2-ax+2$

$\displaystyle a=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2(3t^2-at+2)dt=\left[t^3-\frac{a}{2}t^2+2t\right]_0^2=12-2a$

よって　$a=12-2a$　より　$a=4$

したがって　$f(x)=\mathbf{3}x^2-\mathbf{4}x+\mathbf{2}$

(2)　等式の両辺を x で微分すると

$f(x)=\mathbf{2}x+\mathbf{2}$　である．

また，等式において $x=a$ のとき　$0=a^2+2a-3=(a+3)(a-1)$

よって　$a=-\mathbf{3},\ \mathbf{1}$　である．